

Scilab-Programmbeispiele

Skizzen, Formeln, Erläuterungen

Helmut Haase

Letzte Änderung: 2. November 2016

[Code hierzu](#)

[Website hierzu](#)

Inhaltsverzeichnis

1	Aspekt einer 3D-Graphik ändern, Animation	5
2	Autobahnkurve, Klothoide oder Cornu-Spirale	6
3	Bestimmtes Integral von $f(x) = \cos x^{\arcsin x^2}$	6
4	Datumsdifferenz in Tagen	6
5	Differentialgleichung simpel gelöst	7
6	Doppelpendel-Animation	7
7	Doppelstern Sonne - Erde	8
8	Drehfeld einer Freileitung, Animation	9
9	Dreibein zur Orientierung in 3D-Graphik	10
10	Dualzahl \rightarrow Dezimalzahl	11
11	Ellipsen-Flächeninhalt	11
12	Fakultät	11
13	Gehrungsschnitt	11
14	Gleichrichter in Einweg-Schaltung	12
15	Golfball-Flugbahn	12
16	Graphik-Demos. plot, surf & Co.	13
17	Graphiken bequem aufrufen	13
18	Gravitationsfeld der Erde	14
19	Isolinien der bivariaten Funktion $z = \sin x \cos y$	14
20	Komplexe Rechnung ohne besondere Aufforderung	14
21	Konforme Abbildung	14
22	Lineares Gleichungssystem	15
23	Lissajous-Figur in 3D	15
24	Minima der bivariaten Funktion $z = x \sin x \cos y$	16
25	Monte-Carlo-Simulation	16
26	Nichtlineare Gleichung $\tan x + \cos x = \pi$	16
27	Nichtlineare Regression	16

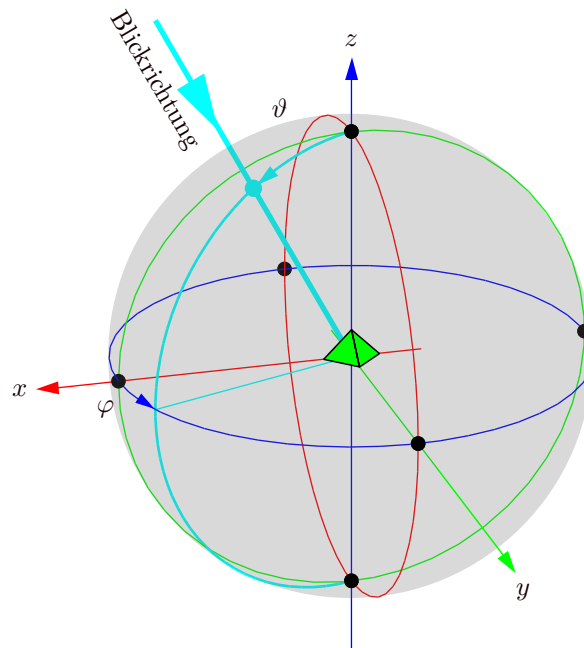
28	Parabel-Diskussion	17
29	Polynom-Kurvendiskussion	17
30	Quader zeichnen	17
31	Random Walk nach Abi-Feier	18
32	Rechenzeitmessung - Wie schnell ist mein Rechner?	18
33	Regression mit Polynom-Ansatz	18
34	Resonanz in R-L-C-Kreis	19
35	Satelliten-Navigation, GPS	19
36	Schiffsschaukel, Animation	20
37	Schraubenlinie als Polygonzug	21
38	Sonnenstand in verschiedenen Koordinatensystemen und Zeitgleichung	21
39	Sudoku	21
40	Tabelle mit Text, Zahlen und Spaltenüberschrift	21
41	Tsunami von zwei Seiten	22
42	Überschallflug	22
43	Vektorprodukt, Kreuzprodukt	22
44	Verzinsung, Zins	22
45	Zentralprojektion	22
46	Zins, Sparen, Kredit, Rente, Finanzrechnung	24

Vorbemerkung

Jeder braucht soviel Mathematik, wie er kann. Dieser saloppe Satz gilt auch hier. Scilab ist ein Programm, das Mathematik anwendet - nicht lehrt. Für letzteres studieren Sie lieber ein Mathematikbuch - und probieren dann mit Scilab aus, was Sie üben wollen.

Mit anderen Worten: Es kann sein, dass Ihnen der mathematische Hintergrund einiger hier beschriebener Scilab-Anwendungen nicht vertraut ist. Dann lassen Sie den Skriptabschnitt einfach laufen und schauen, was er tut. Auch wenn Ihnen Funktionen, Polynome, komplexe Zahlen, Zufallsvariablen, Vektoren, Matrizen und deren Operationen, Integrale und Differentialgleichungen noch nicht begegnet sind, können Sie hier zumindest damit experimentieren.

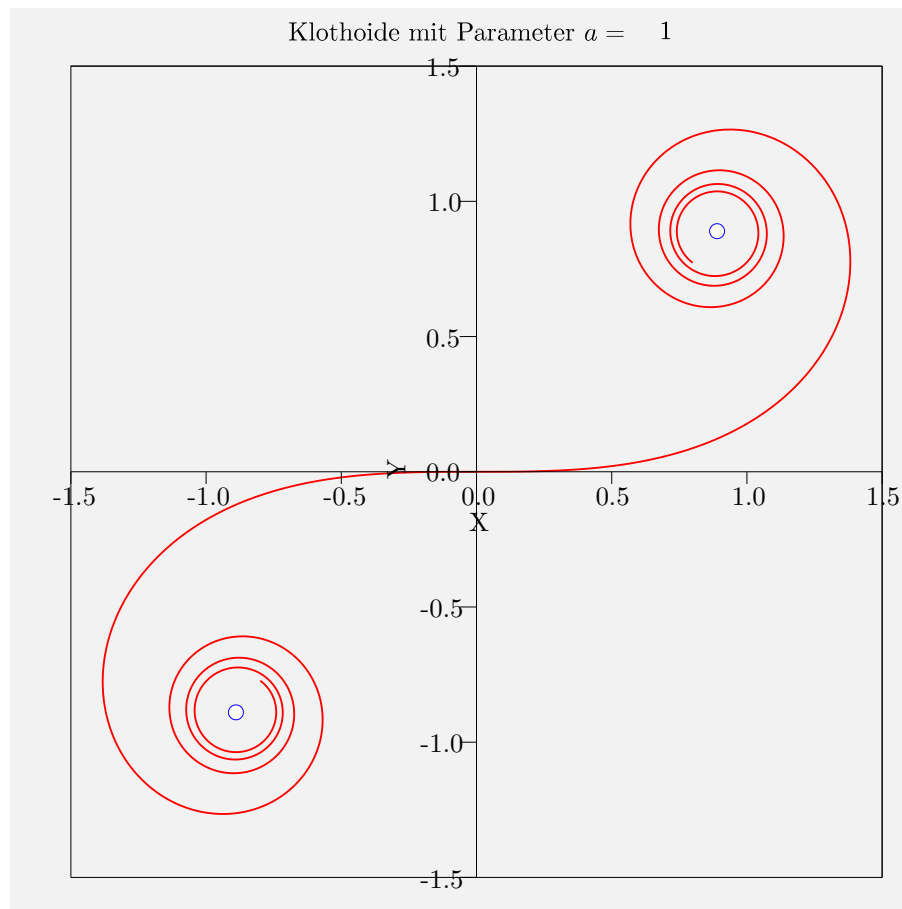
1 Aspekt einer 3D-Graphik ändern, Animation



Blickrichtung auf ein 3D-Objekt mit `rotation_angles`

Durch die Befehle `ca=gca(); ca.rotation_angles = [theta,phi];` wird die Blickrichtung des Beobachters festgelegt, der *weit entfernt vom Objekt* (Pyramide) vorzustellen ist, so dass er eine Parallelprojektion wahrnimmt. Das erste Argument **theta** bezeichnet den Polwinkel und **phi** den Azimutwinkel. Der Beobachter liegt ausgestreckt bäuchlings auf der Linie $\varphi = \text{konst}$ mit dem Kopf zum Pol $\vartheta = 0$. Das Objekt kann sich irgendwo im Raum befinden. ϑ und φ sind Kugelkoordinaten.

2 Autobahnkurve, Klothoide oder Cornu-Spirale



Der im 1. Quadranten liegende Teil der Klothoide hat die Koordinaten

$$x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi\tau^2}{2} d\tau \quad \text{und} \quad y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi\tau^2}{2} d\tau.$$

Die vom Ursprung aus gemessene Länge der Kurve bei t und der Krümmungsradius betragen

$$s = t a \sqrt{\pi} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{a^2}{s}.$$

Man fährt mit dem Auto auf einer Klothoide, wenn man das Lenkrad mit konstanter Drehzahl dreht.

3 Bestimmtes Integral von $f(x) = \cos x^{\arcsin x^2}$

Das bestimmte Integral wird mit `intg()` berechnet.

4 Datumsdifferenz in Tagen

Hierzu wird `datenum()` verwendet. In Scilab stehen mehr Befehle zu Zeit und Datum zur Verfügung. `apropos("Time and date")` in Konsole eingeben!

5 Differentialgleichung simpel gelöst

Im Beispiel wird die Differentialgleichung (Dgl.) 2. Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0 \tag{2}$$

in kleinen (Zeit-)Schritten Δt linear in die Zukunft extrapoliert.

Die Dgl. 2. Ordnung ist vorher in zwei äquivalente Dgln. 1. Ordnung gemäß

$$\frac{dy}{dt} =: v \tag{3}$$

und

$$\frac{dv}{dt} = -y \tag{4}$$

aufgeteilt.

Die beiden Gln.

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v(t)\Delta t \tag{5}$$

und

$$v(t + \Delta t) = v(t) + (-y(t)) \Delta t \tag{6}$$

repräsentieren ein primitives Lösungsverfahren. Primitiv deshalb, weil wesentlich bessere existieren! Der Weg liefert aber ein Gefühl dafür, was Dgln. eigentlich bedeuten.

6 Doppelpendel-Animation

Ein Doppelpendel entsteht, wenn am Ende eines gewöhnlichen ebenen Pendels ein zweites aufgehängt ist. *Eben* bedeutet, dass beide in derselben Ebene schwingen, also um parallele Achsen → <http://de.wikipedia.org/wiki/Doppelpendel>. Die Anordnung wird als Beispiel eines „chaotischen Systems“ herangezogen. Die Bewegung ist aber vorhersagbar.

Das Doppelpendel wird durch zwei gekoppelte, nicht lineare Dgln. 2. Ordnung

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ = -g(m_1 + m_2) \sin \varphi_1 \end{aligned} \tag{7}$$

$$m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -gm_2 \sin \varphi_2 \tag{8}$$

beschrieben. Index 1 bezeichnet das ortsfeste Teilpendel, $l_{1,2}$ die Längen der masselosen Pendelstangen und $m_{1,2}$ die (Punkt-)Massen. Die Winkel $\varphi_{1,2}$ der Pendelstangen werden gegen die Richtung der Schwerebeschleunigung \vec{g} gemessen. In Ruhe sind beide dementsprechend gleich null. Die Punkte über den Variablen bezeichnen Ableitungen nach der Zeit. Die Terme mit $\varphi_{1,2}$, $\dot{\varphi}_{1,2}$ und $\ddot{\varphi}_{1,2}$ stehen für Momente aus Schwer-, Flieh- bzw. Beschleunigungskräften.

Setzt man in den Dgln. $\ddot{\varphi}_{1,2}$ durch $\omega_{1,2}$, erhält man das gleichwertige Dgl.-System

$$(m_1 + m_2) l_1 \dot{\omega}_1 + m_2 l_2 \dot{\omega}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{9}$$

$$= -m_2 l_2 \omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - g(m_1 + m_2) \sin \varphi_1$$

$$m_2 l_2 \dot{\omega}_2 + m_2 l_1 \dot{\omega}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = m_2 l_1 \omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - gm_2 \sin \varphi_2 \tag{10}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \tag{11}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2. \tag{12}$$

Es besteht aus vier Dgln. 1. Ordnung. Die beiden ersten lassen sich prinzipiell - und insbesondere numerisch - nach ω_1 und ω_2 auflösen, so dass man schließlich ein System von vier Dgln. erhält mit nur den Ableitungen $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\omega}_1$ und $\dot{\omega}_2$ auf den linken Seiten. Auf den rechten Seiten stehen keine Ableitungen mehr, womit die günstige Ausgangsform

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \quad (13)$$

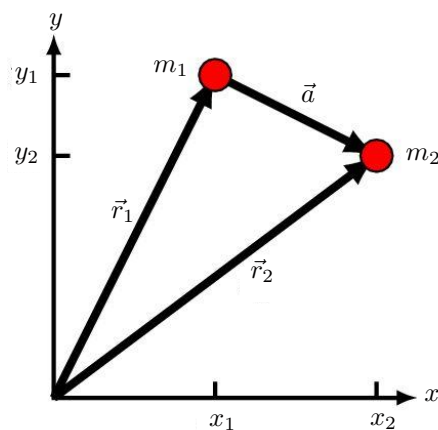
für die numerische Lösung erreicht ist. Darin ist $z = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \omega_1 \ \omega_2)'$ der Zustandsvektor. Zur numerischen Lösung wird noch der Anfangszustand der Anordnung benötigt. Das sind die Winkel und Winkelgeschwindigkeiten der beiden Teilpendel, zusammengefasst im Anfangsvektor

$$z_0 = z(0) = (\varphi_1(0), \varphi_2(0), \omega_1(0), \omega_2(0))', \quad (14)$$

der zur Aufgabenstellung gehört. Alles Weitere ist aus dem Code ersichtlich. Dort wird das Dgl.-System mit dem Kommando `ode` gelöst.

7 Doppelstern Sonne - Erde

Die Gravitationskraft der Sonne auf die sie umkreisende Erde wirkt in umgekehrter Richtung auch auf die Sonne und lässt sie auf einer Bahn kleinen Durchmessers umlaufen. Die Bahnen beider Himmelskörper werden hier berechnet. Die Bewegungsgleichungen sind wie im Abschn. 6 Dgln.. Wie dort werden sie auch hier mit dem Kommando `ode` gelöst.



Doppelstern

Die zu beachtenden Gln. und Definitionen sind

$$\vec{f} = \Gamma \frac{m_1 m_2}{a^3} \vec{a} = k \vec{a} \quad \text{Kraft auf } m_1 \quad (15)$$

$$f_x = k a_x \quad (16)$$

$$f_y = k a_y \quad (17)$$

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{Abstandsvektor von } m_1 \text{ nach } m_2 \quad (18)$$

$$a_x = x_2 - x_1 \quad (19)$$

$$a_y = y_2 - y_1 \quad (20)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (21)$$

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f} \quad \text{Bewegungs - Gl. von } m_1 \quad (22)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{f}. \quad \text{Bewegungs - Gl. von } m_2 \quad (23)$$

Γ ist die Gravitationskonstante. Diese Gln. lassen sich für die numerische Lösung in die Form

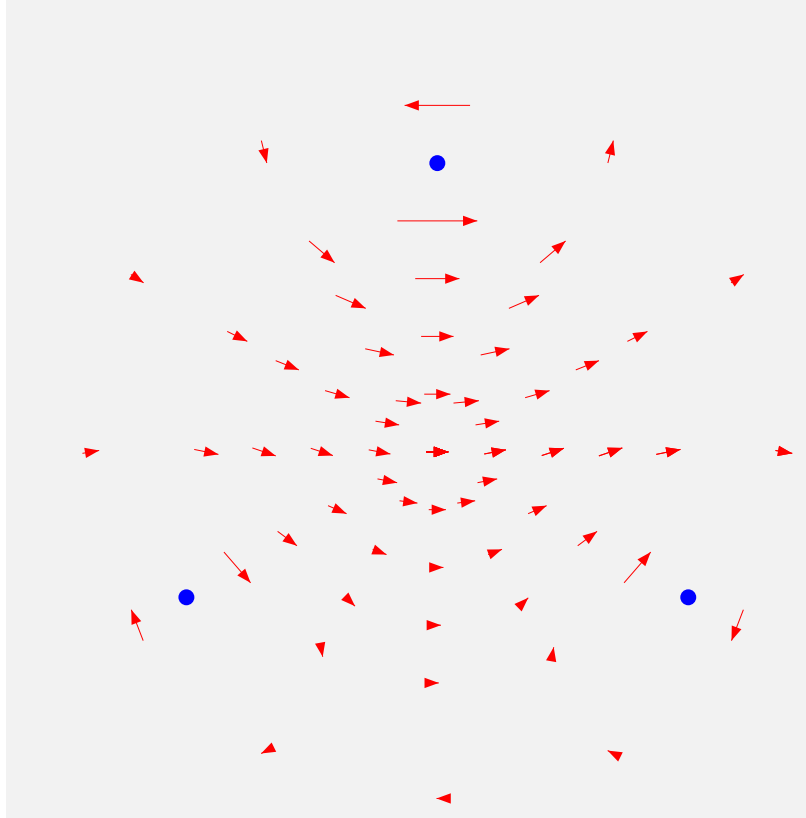
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ f_x/m_1 \\ f_y/m_1 \\ -f_x/m_1 \\ -f_y/m_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad \frac{dz}{dt} = g(z) \quad (24)$$

bringen. Der Vektor $z_0 = z(t=0)$ der Anfangswerte gehört zur Aufgabenstellung.

8 Drehfeld einer Freileitung, Animation

Es wird das Magnetfeld (\vec{B} oder \vec{H}) einer Drehstrom-Freileitung graphisch dargestellt. Die drei parallelen Leiter werden von jeweils um eine Drittelperiode zeitverschobenen sinusförmigen Wechselströmen durchflossen. Im Querschnitt durch das System liegen die Leiter auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Beobachten Sie das Feld in unmittelbarer Umgebung jeweils eines Leiters und zum Vergleich in der Mitte des Systems. Mittig herrscht ein Drehfeld (zirkulare Polarisation), in Leiternähe ein Wechselfeld (lineare Polarisation).

Drehfeld zwischen den Leiterseilen einer Drehstromfreileitung

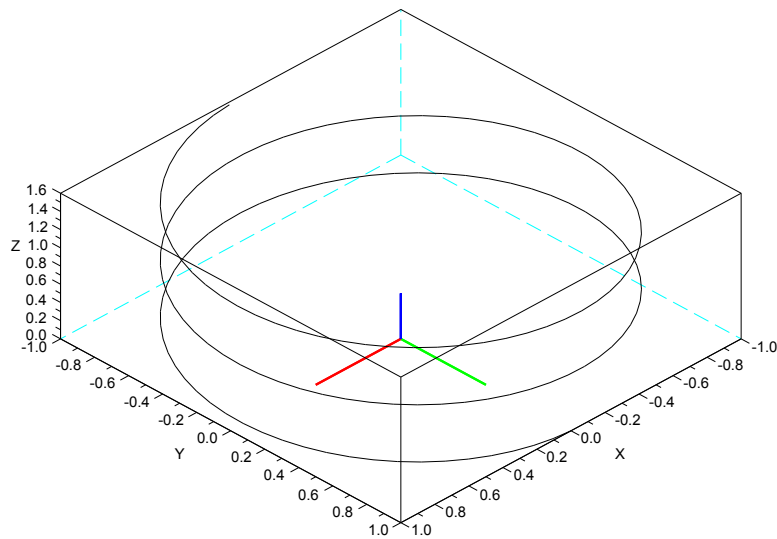


Drehfeld einer symmetrischen Drehstromfreileitung

9 Dreibein zur Orientierung in 3D-Graphik

Wenn man mit dem Drehwerkzeug eine 3D-Graphik von einem anderen Beobachtungspunkt aus betrachtet, kann man leicht die Koordinatenachsen und deren Richtungen verwechseln. Wenn man zusätzlich zu der Graphik die Funktion `Dreibein` aufruft, erscheint ein Achsenkreuz, dessen x/y/z-Achse jeweils rot/gün/blau eingefärbt ist. Die Länge der „Beine“ und deren Schnittpunktslage sind einstellbar.

Dreibein



Achsenkreuz (Dreibein) zur besseren Orientierung in 3D-Graphiken

10 Dualzahl \rightarrow Dezimalzahl

Hier wird eine binäre Zufallszahl mit vorgegebbarer Stellenzahl gebildet und die entsprechende Dezimalzahl berechnet, ohne eine Schleife zu nutzen. Zum Vergleich wird schließlich die Dezimalzahl mit der Scilab-Funktion `bin2dec` ermittelt.

11 Ellipsen-Flächeninhalt

Der Inhalt der Ellipsenfläche mit den Halbachsen a und b beträgt $A = \pi ab$. Das Codeschnippel berechnet A numerisch mit Hilfe der Integrationsfunktion `intg`. Dabei werden kartesische und alternativ Polarkoordinaten benutzt.

12 Fakultät

Die Werte der Fakultätsfunktion werden berechnet und bei `format(20)` angezeigt. Beachten Sie den automatischen Äebergang auf die Darstellung mit Zehnerpotenzen! `D+18` steht für 10^{18} .

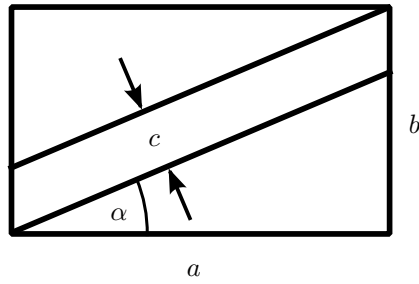
13 Gehrungsschnitt

Ein mit Schrauben verbundener Rahmen (Innenmaße a und b) soll diagonal mit einem Kantholz (Breite c) versteift werden. Gesucht ist der Winkel α .

Die zu erfüllende Gl.

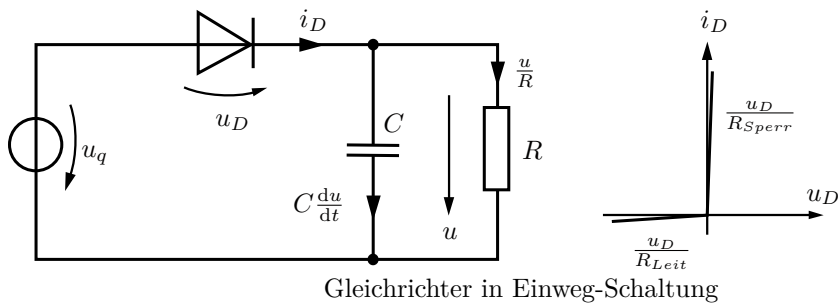
$$\frac{c}{\cos \alpha} + a \tan \alpha = b \quad (25)$$

wird mit `fsolve` numerisch nach α aufgelöst.



Diagonalversteifung mit Gehrungsschnitt

14 Gleichrichter in Einweg-Schaltung



Gleichrichter in Einweg-Schaltung

Die Schaltung wird durch die beiden Gln.

$$i_D = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \quad (26)$$

und

$$u_D = u_q - u \quad (27)$$

beschrieben. Daraus folgt die für ode geeignete Form

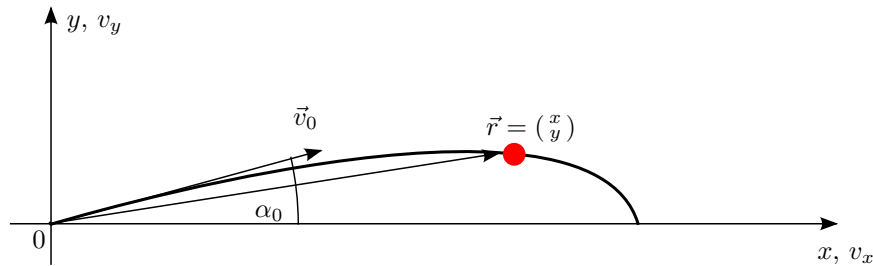
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \left(i_D(u_D) - \frac{u}{R} \right) \quad \text{mit} \quad u_0 = u(0). \quad (28)$$

$$\text{Modell} \quad \text{Anfangswert} \quad (29)$$

Das hier verwendete Diodenmodell ist sehr grob. Die Simulation liefert, ausgehend vom festgesetzten Anfangswert u_0 der Kondensatorspannung, zunächst den transienten (Einschwing-)Vorgang, der dann in den Beharrungszustand übergeht. An allen Parametern darf ‚gedreht‘ werden. Nutzen Sie auch die Zoomfunktion der Graphik!

15 Golfball-Flugbahn

Geschwindigkeit v_0 , Abschlagwinkel α_0 sowie die Schwer- und die Luftwiderstandskraft $m\vec{g}$ bzw. \vec{f} bestimmen die Flugbahn des Golfballs.



Flugbahn eines Golfballs

Die folgenden Gleichungen sind zu erfüllen.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f} \quad \text{Vektorielle Bewegungsgleichung des Balls} \quad (30)$$

$$\vec{f} = -cv\vec{v} + m\vec{g} \quad \text{Am Ball angreifende Kräfte} \quad (31)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cvv_x \quad \text{x-Bewegungsgleichung des Balls} \quad (32)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -cvv_y - mg \quad \text{y-Bewegungsgleichung des Balls} \quad (33)$$

$$c = c_w A \rho / 2 \quad \text{Koeffizient der Luftwiderstandskraft} \quad (34)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{Betrag der Geschwindigkeit} \quad (35)$$

Dasselbe noch einmal in einer an die numerische Integration der Dgln. angepassten Form:

$$\frac{dv_x}{dt} = -cvv_x/m \quad (36)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -cvv_y/m - g \quad (37)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (38)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (39)$$

Zur Aufgabenstellung gehören wieder die Anfangswerte $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = v_0 \cos \alpha_0$ und $v_{y0} = v_0 \sin \alpha_0$, mit denen `ode` die Lösung startet.

16 Graphik-Demos. plot, surf & Co.

Hier werden die Demos für eine Auswahl der Scilab-Graphik-Kommandos (`plot()`, `plot2d()`, `plot3d()`, `contour()`, `param3d()` und `surf()`) durch Tasteneingaben weitergeschaltet. Im 1. Teil wird die selbstgeschriebene Funktion `STOPP` verwendet. Sie belässt die Graphik-Buttons (z.B. Zoom) funktionstüchtig. Im 2. Teil wird der Scilab-eigene Befehl `xclick` eingesetzt. Hier genügt ein Klick in die Graphik, um zur nächsten zu kommen. Allerdings sind die Graphikwerkzeuge dabei gesperrt.

17 Graphiken bequem aufrufen

Eine weitere Möglichkeit neben denen von Abschn. 16, Graphiken weiter zu schalten! Hier ist auf einen Button im Graphik-Fenster zu klicken. Dadurch wird das nächste Bild aufgerufen. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, Ziffern in die Konsole einzugeben, mit denen der weitere Verlauf des Programms gesteuert werden kann. Das kann z.B. zum Abbruch verwendet werden.

18 Gravitationsfeld der Erde

Das Schwerfeld einer Kugel homogener Dichte mit dem Radius r_0 hat für $r \geq r_0$ den Wert

$$\vec{g} = -\frac{g_0}{r^2/r_0^2} \vec{e}_r. \quad (40)$$

Dabei bezeichnen r_0 , r und g_0 den Kugelradius, den Radius des Aufpunkts bzw. die bei r_0 wirkende Schwerebeschleunigung und \vec{e}_r den radialen Einheitsvektor.

Die Rechnung benutzt Matrizen vom Typ $m \times n \times o$, die man sich als o übereinander geschichtete Matrizen vom Typ $m \times n$ vorstellen kann. Sie werden mit `ndgrid` gebildet. Damit ist ein dreidimensionales Gitter im Raum darstellbar.

19 Isolinien der bivariaten Funktion $z = \sin x \cos y$

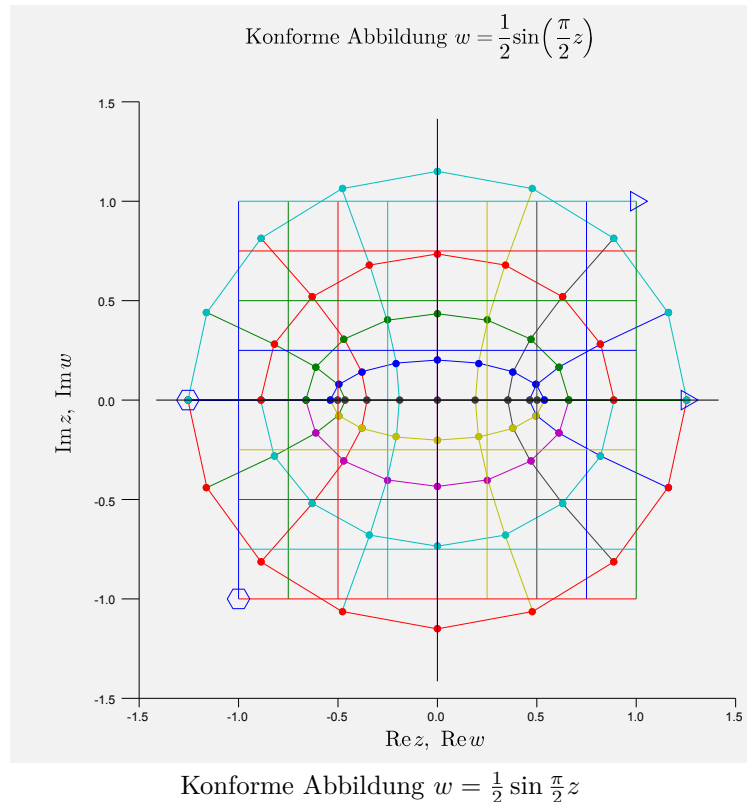
Isolinien einer Funktion von zwei Variablen – hier x und y – verbinden Orte mit gleichem Funktionswert z . Ein anschauliches Beispiel sind die Höhenlinien auf einer Landkarte. Die Isolinien werden hier mit `contour`, das entsprechende Relief mit `surf` dargestellt.

20 Komplexe Rechnung ohne besondere Aufforderung

Wenn das Ergebnis einer Rechenoperation komplexwertig ist, wird es ohne besondere Anweisung auch so von Scilab ermittelt. Dies ist bei allen Funktionen und deren Umkehrfunktionen der Fall, wo es sinnvoll ist (\sqrt{x} , $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x , ...). Das Skript demonstriert das am Beispiel der `arccos`- und `cos`-Funktion.

21 Konforme Abbildung

Die Funktion f einer komplexwertigen Variablen z hat i. A. selbst komplexe Werte w . Das Skript demonstriert, wie man dies veranschaulichen kann. Das geradlinige Argument- z -Gitter wird auf das Wert- w -Gitter abgebildet. Die beiden Drei- und Sechseckpaare markieren (z, w) -Paare.



22 Lineares Gleichungssystem

Hier wird der Backslash-Operator (`\`) zur Lösung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = r \tag{41}$$

eingesetzt. Darin ist A eine nicht singuläre $n \times n$ -Matrix, x der $n \times 1$ -Vektor der Unbekannten und r der Vektor der rechten Gleichungsseite. Auch mehrere ($m > 1$) rechte Seiten können in r zu einer $n \times m$ -Matrix zusammengefasst werden, wobei x dann ebenfalls eine $n \times m$ -Matrix ist.

Der Code bestätigt numerisch die Superponierbarkeit der Lösungen linearer Gleichungen: Wenn bei der Matrix A der Vektor x_i die Lösung für r_i ist, dann ist $\sum_{i=1}^p x_i$ die Lösung für $\sum_{i=1}^p r_i$.

23 Lissajous-Figur in 3D

Lissajous-Figuren sind geschlossene Kurven, deren Koordinaten nach der Art

$$x = \sin k_x \varphi \tag{42}$$

$$y = \sin k_y \varphi \tag{43}$$

$$z = \sin k_z \varphi \tag{44}$$

harmonisch verlaufen. Normalerweise meint man damit Kurven in der Ebene. Die k_i sind ganze Zahlen. Hier wird zur Abwechslung eine räumliche Version vorgestellt. Der Graphik-Befehl dazu ist `param3d`.

24 Minima der bivariaten Funktion $z = x \sin x \cos y$

Die hier vorgegebene Funktion $z(x, y)$ hat viele Minima und Maxima. Welches Minimum `optim` findet, hängt von der Startschätzung ab. Eine (hier nicht genutzte) Möglichkeit ist, die Startwerte in einer Schleife zu variieren.

25 Monte-Carlo-Simulation

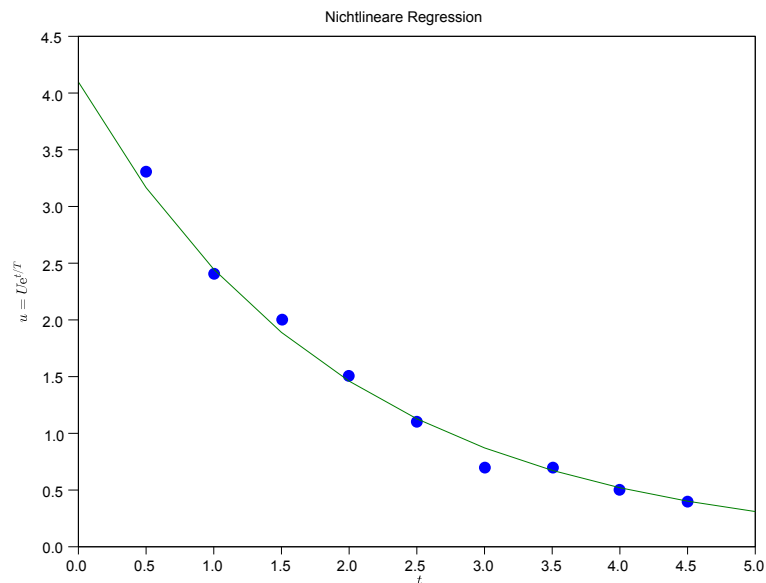
Kirchgänger spenden gleichmäßig verteilt 0 bis S_{Max} Euro. Wie ist die Spendensumme bei n_{Sp} Spendern verteilt? Der Code zeigt eine numerische Lösung nach der Monte-Carlo-Methode. Darin bildet eine Matrix mit n_{Sp} Zeilen und vielen Spalten die zufälligen Einzelspenden ab. Die Spaltensummen entsprechen den Spendensummen, deren Verteilung gefragt ist.

26 Nichtlineare Gleichung $\tan x + \cos x = \pi$

Das Problem wird mit dem Nullstellen-Finder `fsolve` gelöst. Gesucht wird nach Nullstellen der Funktion $f(x) = \tan x + \cos x - \pi$.

27 Nichtlineare Regression

Gegeben ist eine Messreihe (t_i, u_i) . Es wird vermutet, dass sie - bis auf die Störeinflüsse - den Ansatz $u = Ue^{t/T}$ erfüllt. Zu bestimmen sind die Parameter U und T des Ansatzes so, dass sie die Messreihe bestmöglich beschreiben!

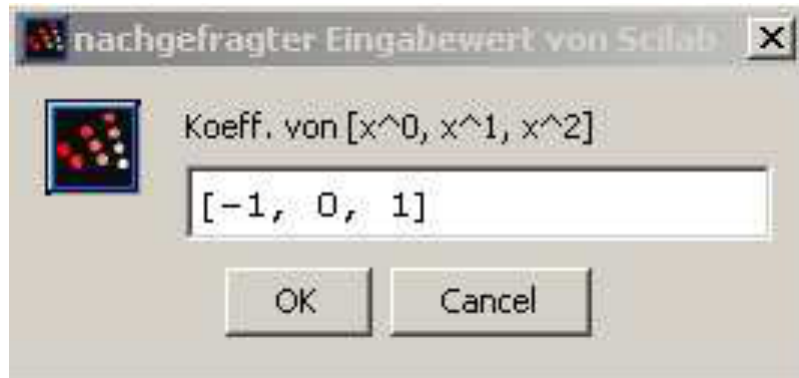


Nichtlineare Regression einer Messreihe

Die Aufgabe wird mit `optim` gelöst.

28 Parabel-Diskussion

Es soll eine function namens `qG1` zur Untersuchung quadratischer Funktionen geschrieben und in einer Endlosschleife aufgerufen werden. Der Graph der Funktion ist zu zeichnen und Nullstellen und Extrempunkt sind zu markieren. Zur Eingabe der Koeffizienten ist `x_matrix` zu benutzen.



Menü zur Eingabe der Koeffizienten

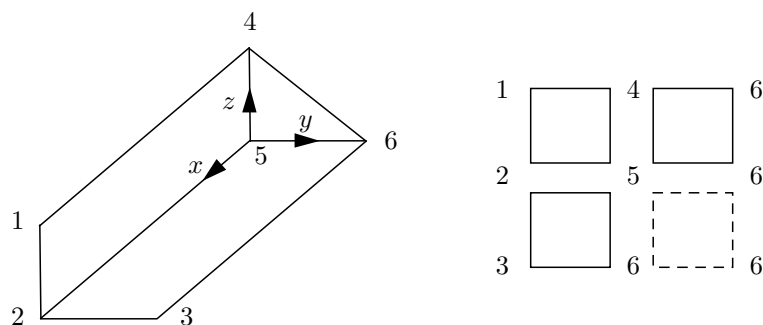
29 Polynom-Kurvendiskussion

Scilab stellt eine Anzahl spezieller Kommandos zur Verfügung, mit denen sich Polynome bequem auf Nullstellen, Exstrema usw. untersuchen lassen. Für Polynome existiert ein eigener Variablentyp. Im Beispiel wird ein Polynom 4. Grades betrachtet.

30 Quader zeichnen

Das Kommando `plot3d2` zeichnet Flächen im Raum. Die Flächen-Gitterpunkte werden koordinatenweise in $n \times m$ -Matrizen mit folgender Eigenschaft gespeichert: Jede 2×2 -Submatrix repräsentiert eine Facette der Fläche. Im Einzelnen werden folgende Beispiele gezeigt:

- 0) Raumecke mit drei Flächen als Vorübung (2 Vierecke, 1 Dreieck)
 - a) Roter Quader
 - b) Roter offener Quader (Schublade), innen grün
 - c) Quader, gedreht um die Achse $[1;2;-3]$ um 30°



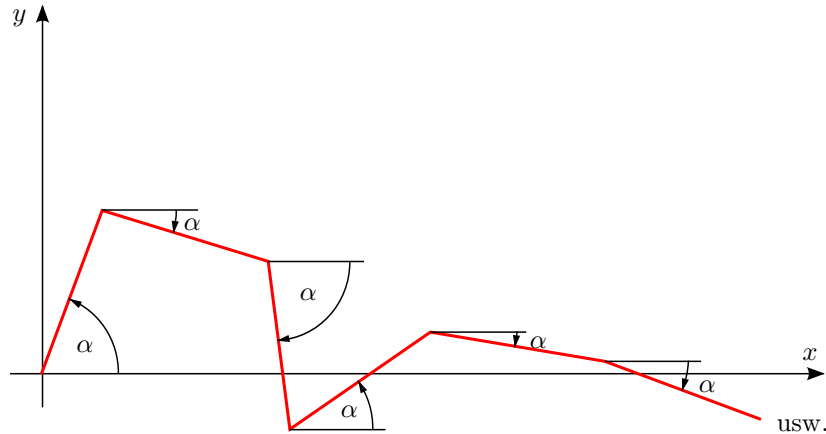
Raumecke und zugehöriges Matrixschema mit den Eckennummern

Die Submatrizen sind rechts in der Abbildung durch Quadrate angedeutet. Um die Matrix vollständig auszufüllen, muss hier ein virtueller Punkt - unten rechts im Schema - hinzugefügt werden. Der Punkt ist so zu wählen, dass die Submatrix keine weitere Fläche generiert. Hier gelingt das mit Punkt 6.

31 Random Walk nach Abi-Feier

Ein Schüler kehrt von der Abi-Feier heim. Er geht auf einer sehr breiten Straße n Schritte gleicher Länge. Der Winkel $\alpha = 0$ bezeichnet die gewünschte Richtung. Der tatsächlich eingeschlagene Winkel ist zufällig und gleichverteilt im Bereich $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Die Aufgabe wird mit dem Zufallszahlen-Generator `rand` gelöst. Der Weg wird graphisch dargestellt, ebenso die Häufigkeitsdichte der Seitwärts-Koordinate der Schritte.



Random Walk
Schritte gleicher Länge, Winkel α gleichmäßig verteilt im Intervall $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

32 Rechenzeitmessung - Wie schnell ist mein Rechner?

Zur Messung der Laufzeit eines Skripts bietet Scilab die Befehle `tic` und `toc`. In diese beiden Befehle eingekleidet wird hier eine 1000×1000 -Matrix A aus Zufallszahlen gebildet, ebenso ein Zufallsvektor r mit 1000 Zahlen. Das Gl.-System $Ax = r$ wird mittels der Inversen von A nach x aufgelöst und dann kontrolliert, ob $Ax = r$ erfüllt ist. Der Ablauf dauert auf dem Rechner des Autors 2,5 s.

33 Regression mit Polynom-Ansatz

Häufig sind Messwerte an einen vorgegebenen mathematischen Ansatz anzupassen. Der Ansatz könnte z.B. ein Polynom

$$y = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \tag{45}$$

vom Grad 3 sein. Die gegebenen Messwerte seien in den Spaltenvektoren x und y gespeichert. Dann folgen die 4 Parameter des Ansatzes aus der Gl.

$$a = \text{pinv}M y. \tag{46}$$

Im Einzelnen bedeuten

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

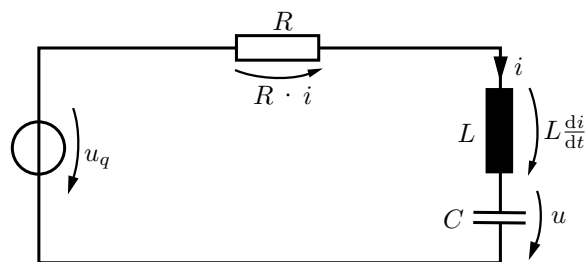
$\text{pinv}M$ ist die Pseudoinverse der Matrix M . Durch Pseudoinversion löst man lineare Gl.-Systeme mit überschüssigen Gln. im Sinne der kleinsten Summe der Abweichungsquadrate.

Im Falle eines linearen Ansatzes liefert der Rechenweg die beiden Parameter der üblichen Regressionsgerade. Wenn man nur das konstante Glied a_1 ansetzt, erhält man den Mittelwert.¹

Im codierten Beispiel werden Polynome 1., 3. und 5. Grades sinusförmigen Messdaten angepasst.

34 Resonanz in R-L-C-Kreis

In dem abgebildeten Stromkreis versorgt eine Spannungsquelle mit der zeitabhängigen Quellenspannung u_q eine Serienschaltung aus Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C . Im Zeitpunkt des Rechenbeginns $t = 0$ betragen Strom und Kondensatorspannung i_0 bzw. u_0 . Das Programm berechnet und zeichnet den Strom und die Spannungen des Stromkreises. Dieser wird durch zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung modelliert, die mit `ode` gelöst werden. Je nach Wahl der Parameter zeigt die Lösung Resonanz, bei der Spannungsamplituden auftreten, welche die der Quellenspannung übertreffen können.



Reihenresonanzkreis

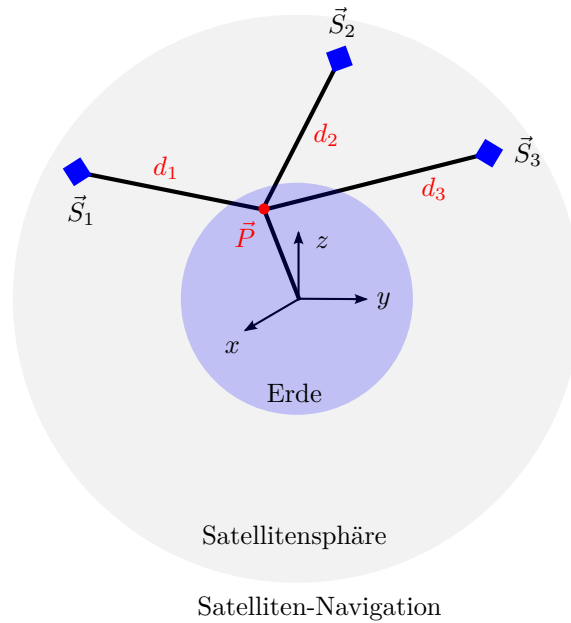
Modell	Anfangswerte
$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}i$	$u_0 = u(0)$ (48)
$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u_q - Ri - u)$	$i_0 = i(0)$ (49)

35 Satelliten-Navigation, GPS

Ein GPS-Gerät hat Sicht auf drei Satelliten, die an den Orten \vec{S}_1 , \vec{S}_2 und \vec{S}_3 stehen, s. Abbildung. Alle überpfeilten Größen sind Ortsvektoren, bezogen auf das zentrale xyz -Koordinatensystem. Das Radienverhältnis Erde/Satellitensphäre beträgt - anders als in der Abb. - 1:6. Das GPS-Gerät misst die Distanzen zu den Satelliten mit d_1 , d_2 bzw. d_3 .

Das Programm berechnet den Ort \vec{P} des GPS-Geräts mit `fsolve` - und zwar als Schnitt dreier Kugelschalen mit den genannten Distanzen als Radien und den jeweiligen Satellitenpositionen als Zentren. Die Kugelschalen-Schnittanordnung wird gezeichnet.

¹Das wäre dann mit Kanonen auf Spatzen geschossen.

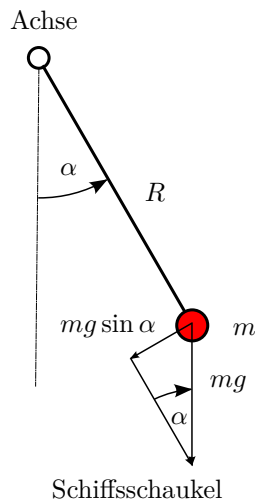


36 Schiffsschaukel, Animation

Die Bewegungsgleichung

$$mR^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgR \sin \alpha - d \frac{d\alpha}{dt} + M_a \tag{50}$$

ist die eines ebenen Pendels. Das Beschleunigungsmoment auf der linken Seite entsteht aus der Summe von Rückstellmoment durch die Schwerkraft, Dämpfungsmoment - z.B. durch Luftreibung - und äußerem Antriebsmoment M_a . Die winkelgeschwindigkeitsproportionale Dämpfung wird durch den Koeffizienten d beschrieben. Zu Beginn der Rechnung bei $t = 0$ muss festgelegt sein, aus welchem Anfangszustand heraus die Schiffsschaukel gestartet wird. Hierzu genügen Anfangswinkel α_0 und Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \frac{d\alpha}{dt}(0)$.



In der für den Befehl `ode` geeigneten Form bilden die DGLn.

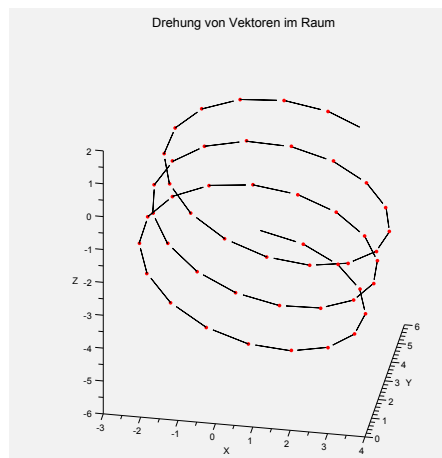
$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \quad \text{Anfangswert } \omega_0 \quad (51)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{mR^2}(-mgR \sin \alpha - d\omega + M_a) \quad \text{Anfangswert } \alpha_0 \quad (52)$$

das mathematische Modell der Schiffsschaukel.

37 Schraubenlinie als Polygonzug

Die Aufgabe besteht darin, eine Schraubenlinie aus Stecknadeln mit rotem Kopf zu zeichnen. Dazu wird der Befehl `param3d` herangezogen. Letzterer bildet den Kern einer Funktion² zum Zeichnen von Vektor-Feldbildern. Ferner wird eine Funktion zum Drehen von Vektoren im Raum eingesetzt.³



Schraubenlinie

38 Sonnenstand in verschiedenen Koordinatensystemen und Zeitgleichung

Die Berechnung erfolgt mit der Funktion `!Sonne`. Die vorgegebenen Zeitpunkte können zwischen 1800 und 2200 liegen.

39 Sudoku

Das Programm ist eine Äcbersetzung eines Matlab-Programms von G.M. Boynton. Es funktioniert rekursiv, d.h. es ruft sich selbst wiederholt auf. Wenn mehrere Lösungen existieren, werden alle gefunden. Der Code verwendet "brute force". Deshalb dauert die Lösung etwas länger.

40 Tabelle mit Text, Zahlen und Spaltenüberschrift

Scilab ist kein Tabellenkalkulationsprogramm. Manchmal möchte man aber Ergebnisse tabellarisch darstellen, wobei die Tabelle sowohl Zahlen- als auch Textspalten enthalten kann. Hierzu dient die Funktion `TABLE`.⁴

²gespeichert in `FunctionBox.sci`

³gespeichert in `FunctionBox.sci`

⁴gespeichert in `FunctionBox.sci`

41 Tsunami von zwei Seiten

Diese Animation lässt zwei Wellen - eine von links, eine von rechts - aufeinander zu rollen. Sie überlagern sich zu jedem Zeitpunkt, so dass im Zeitbereich der Begegnung sehr hohe Amplituden entstehen. Die maximale Amplitude wird separat berechnet und dargestellt.

Nachtrag: Die Animation steht in keinem Zusammenhang mit der Erdbeben- und Tsunami-Katastrophe ab dem 11. März 2011 an der japanischen Ostküste. Das Skript wurde vorher erstellt und ist kein Versuch, Tsunami-Wellen realistisch zu modellieren. Der Autor verbeugt sich vor den Leiden und der Tapferkeit des japanischen Volkes.

42 Überschallflug

Es wird graphisch dargestellt, wie sich der Schall eines schnell fliegenden Objekts im Raum ausbreitet. Die Bilder veranschaulichen den Überschallknall durch die Überlagerung nicht konzentrischer kreisförmiger Wellenfronten.

43 Vektorprodukt, Kreuzprodukt

Die Funktion `z=CROSS(x,y)`⁵ berechnet das Vektorprodukt im Ortsraum. Die Eingabeargumente `x` und `y` sind Matrizen mit der Zeilenzahl 3. Folgende *Spaltenzahl-Kombinationen* sind für `(x,y)` erlaubt: `(n,n)`, `(1,n)`, `(n,1)` mit $n \geq 1$.

Das Programm testet `CROSS` mit 3D-Zufallsvektoren (mit Markerspitze statt Pfeil). Mit dem Drehwerkzeug des Graphikfensters können Sie die Marker deckungsgleich anordnen, um zu kontrollieren, dass der Produktvektor senkrecht zu beiden Faktoren verläuft.

44 Verzinsung, Zins

Das kleine Programm berechnet Kontostände über 10 Jahre bei einem Anfangskapital von 100 € und 3 % Zins pro Jahr (einführendes Beispiel dafür, wie überflüssig Schleifen in Scilab meistens sind).

45 Zentralprojektion

Scilab stellt 3D-Graphiken in Parallelprojektion dar. `plot3d2(x,y,z)` erzeugt ein entsprechendes Bild, wenn `x,y,z` ein gültiges Facettenobjekt bildet. Die Funktion `[u,v,w,polarw,azimuth]=projizierAB(x,y,z,A,B,varargin)`⁶ transformiert die Objektkoordinaten-Matrizen `x,y,z` in die Matrizen `u,v,w` eines Ersatzobjekts, das `plot3d2(u,v,w)` bei Vorgabe des Aspekts

`rotation_angles = [polarw,azimuth]` in Zentralprojektion abbildet.

Mathematik der Funktion projizierAB: Im 1. Schritt werden alle Punkte `x,y,z` in die (Projektions-)Ebene `E` projiziert (vgl. Abb. auf S.23). In ihr liegt der Blickpunkt \vec{B} , auf den der Beobachter vom Augpunkt \vec{A} in der Richtung des Normalenvektors

$$\vec{n} = \vec{B} - \vec{A} \tag{53}$$

schaat. Der Bildpunkt \vec{X}' muss die Gl. der Projektionsebene

$$\vec{n}(\vec{X}' - \vec{B}) = 0 \tag{54}$$

⁵gespeichert in `FunctionBox.sci`

⁶gespeichert in `FunctionBox.sci`

und die Geradengleichung des Projektionsstrahls

$$\vec{X}' = \vec{A} + \lambda(\vec{X} - \vec{A}) \quad (55)$$

erfüllen. Die Funktion `projizierAB()` löst die beiden Gln. nach λ auf, womit sich die Bildpunkte \vec{X}' direkt angeben lassen.

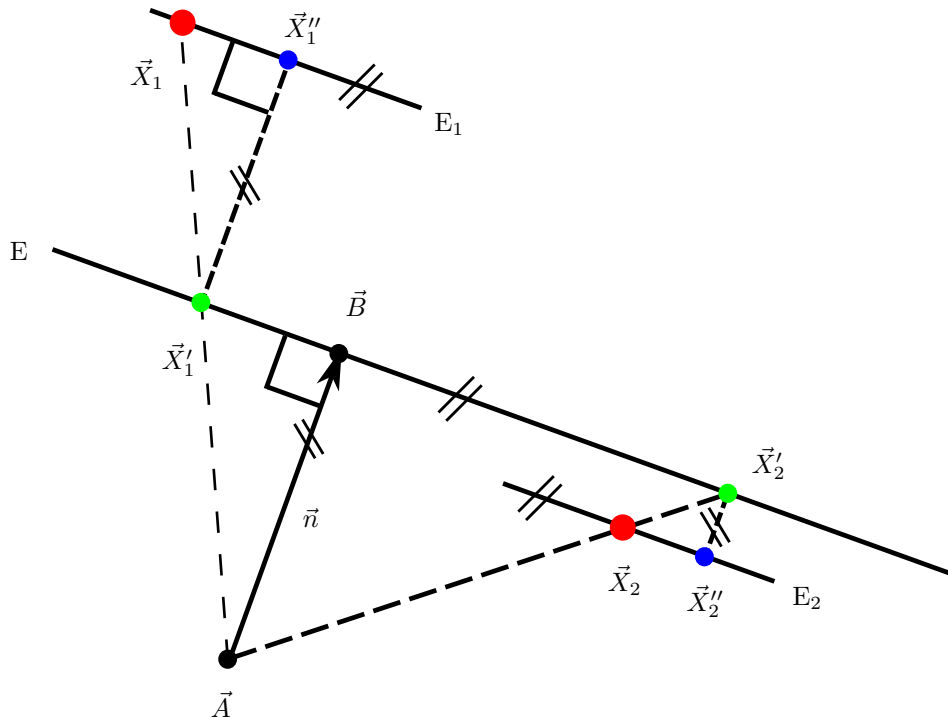
Sie eignen sich aber nicht direkt zur Darstellung, weil *alle* Originalpunkte in einer Ebene sichtbar würden. Kein hinteres Objektteil würde durch ein weiter vorn liegendes — wie zu wünschen ist — verdeckt. Im 2. Schritt wird deshalb jeder Bildpunkt \vec{X}' in Richtung des Normalenvektors \vec{n} in die Parallelebene zu E verschoben, in welcher der Originalpunkt \vec{X} liegt. Der entsprechende Bildpunkt \vec{X}'' muss die Ebenengleichung

$$\vec{n}(\vec{X}'' - \vec{X}) = 0 \quad (56)$$

und die Geradengleichung

$$\vec{X}'' = \vec{X}' + \mu\vec{n} \quad (57)$$

erfüllen. Die Funktion `projizierAB()` löst die beiden Gln. nach μ auf, womit sich die Bildpunkte \vec{X}'' direkt angeben lassen.



Schema der Zentralprojektion und Erzeugung eines 3D-Ersatzobjekts

Abbildung: Zentralprojektion ($\vec{X}'_{1,2}$) der Originalpunkte $\vec{X}_{1,2}$ auf die Projektionsebene E und Konstruktion eines Ersatzobjekts ($\vec{X}''_{1,2}$) im Raum. Letzteres erscheint bei Parallelprojektion in Richtung von \vec{n} zentralprojiziert. 3D-Objekte stellt Scilab (z.B. mit `plot3d2`) in Parallelprojektion dar. Dabei verdecken die vorderen die weiter hinten liegenden Teile. Äoerbpfeilte Großbuchstaben bezeichnen Ortsvektoren. $\vec{X}'_{1,2}$: Bildpunkte der Zentralprojektion, $\vec{X}''_{1,2}$: Bildpunkte des 3D-Ersatzobjekts

46 Zins, Sparen, Kredit, Rente, Finanzrechnung

Das Programm erlaubt Finanzrechnungen zu Ratenspar- Kredit- und Rentenverträgen. Von den fünf verknüpften Größen (Anfangskapital A , Zahlungsrate R , Anzahl der Raten n , Zinssatz in % z , Endkapital E) können vier beliebige vorgegeben werden, um die fünfte daraus zu berechnen. In der Rechnung ist die Saldenfolge

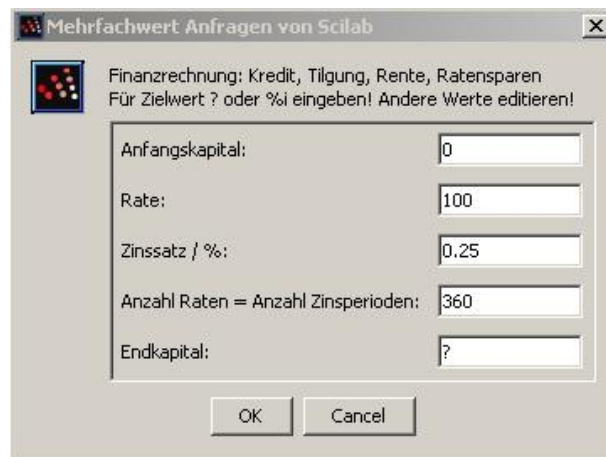
$$A, Aq + R, (Aq + R)q + R, (\text{voriger Saldo})q + R, \dots, E \quad (58)$$

vorausgesetzt.

Die Grundlegende Beziehung zwischen den Größen ist

$$E = Aq^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit} \quad q = 1 + z/100. \quad (59)$$

Das Anfangskapital A ist bei Krediten negativ einzugeben, ebenso die Rate bei Renten. Bei unbekanntem Zinssatz z wird dieser (zunächst q) numerisch mit `fsolve` aus (59) berechnet. Alle anderen Größen sind durch explizite Formeln angebar.



x_mdialog-Eingabedialog

Für die Eingabe verwendet das Programm den `x_mdialog`-Eingabedialog (s. Abb.) in einer Schleife. Die gesuchte Größe ist dort durch ? (oder %i⁷) kenntlich zu machen. Der Kern des Programms ist die Funktion `finanz`.⁸

⁷Der Variablen ? ist hier die imaginäre Einheit %i zugeordnet. Sie wird lediglich für die Fallsteuerung verwendet.

⁸gespeichert in `FunctionBox.sci`